ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Gestão do Desporto 2º sem., 1ª Prova Intercalar 28. 03. 17

1horas. (20 valores)

Nome:____

Espaço reservado para classificações					
1. (30)	2a.(20)	*3 a.(30)*	*. 3 c. (25)*	*4.(20)*	*T:*
	2b.(30)	3 b.(15)	*3 d.(* 30)		P:

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. A pizzeria Pizza Quente tem um tempo médio de entrega de pizzas de 30 minutos.

Considere que o tempo de entrega de um pedido tem distribuição exponencial.

Selecionou-se uma amostra casual de 20 encomendas e registou-se o tempo de entrega das mesmas. Qual a probabilidade de o maior tempo de entrega ser superior à média?

X-Tempo, em minutos, de entrega da encomenda $\sim Ex(\lambda)$. Como $E(X) = 30 = \frac{1}{\lambda}$ $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{30}$ e $F_{(X)}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0$

$$P(Max\{X_i\} > 30) = 1 - P(Max\{X_i\} \leq 30) = 1 - \left[F_{(X)}(30)\right]^{20}$$
$$= 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{30}*30}\right]^{20} = 0.999$$

2. Pretende-se ter uma ideia da densidade do tráfego em certo local entre as 8 e as 9 horas. Sabe-se que o número de veículos que passam nessa hora nesse local segue uma distribuição de Poisson. Selecionou-se uma amostra casual de dimensão 9 e registaram-se os seguintes valores $(95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70)$.

a) Determine o estimador e a estimativa pelo método dos momentos para a média da população.

X- número de veículos que passam nessa hora nesse local$\sim Po(\lambda)$ $\Rightarrow E(X) = \lambda = Var(X)$

Como só temos um parâmetro desconhecido só é necessária uma equação:

$E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \lambda = \bar{X} \Rightarrow \check{\lambda}(X_1, X_2, \cdots, X_9) = \bar{X}$ estimador

$\Rightarrow \check{\lambda}(x_1, x_2, \cdots, x_9) = \bar{x} = 90$

b) Verifique se o estimador obtido na alínea a) é não enviesado e consistente.

$E(\bar{X}) = E(X) = \boldsymbol{\lambda}$ então $\bar{X}$ é estimador não enviesado para $\boldsymbol{\lambda}$

$\lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ e $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{n}} = 0$, $\bar{X}$ é estimador consistente para $\boldsymbol{\lambda}$

3. O comprimento, em metros, dos saltos, na modalidade do triplo salto, é bem descrito por uma distribuição normal. Uma amostra casual de 9 atletas que participaram no Campeonato Internacional de Atletismo em Xai Ping, nesta modalidade, forneceu os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 120.62, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1839.36$$

a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média dos saltos, na modalidade de triplo salto.

Variável Fulcral –$\mathrm{T} = \frac{\bar{x}-\mu}{s'/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \Rightarrow t\alpha_{/2}: P\left(T > t\alpha_{/2}\right) = 0.025$

$\Rightarrow t\alpha_{/2} = 2.306$

$$IC_{\mu}^{(1-\alpha)*100\%} = \left(\bar{x} - t\alpha_{/2}\, {s'}/{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\alpha_{/2}\, {s'}/{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(13.402 - 2.306 * \frac{5{,}277}{3},\ 13.402 + 2.306 * \frac{5{,}277}{3}\right) = (9.346, 17.458)$$

b) Pode dizer-se que a média dos saltos na população pertence ao intervalo de confiança calculado, com uma probabilidade de 95%? Justifique.

Não, porque a verdadeira média da população pode ou não pertencer ao I.C., o que sabemos é que se calcularmos um grande número de intervalos de confiança dessa população a média pertencerá ao I.C. em 95% dos casos.

c) Sem fazer quaisquer cálculos, explique como poderia reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança calculado?

Poderia reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança calculado aumentando o grau de confiança mantendo a dimensão da amostra constante ou aumentando a dimensão da amostra mantendo o grau de confiança constante.

d) Para a mesma população e com a mesma amostra obteve-se o seguinte intervalo de confiança para a variância da população: $(14.366, 81.526)$. Qual o nível de confiança do mesmo?

V.F. $\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

$IC_{\sigma^2}^{(1-\alpha)*100\%} = \left(\frac{(n-1)S'^2}{q_2}, \frac{(n-1)S'^2}{q_1}\right)$ com $\begin{array}{l} q_1: P\left(\chi^2_{(n-1)} < q_1\right) = \alpha/2 \\ q_2: P\left(\chi^2_{(n-1)} > q_2\right) = \alpha/2 \end{array}$

Então $\frac{(n-1)S'^2}{q_2} = 14.366 \Leftrightarrow q_2 = 15.508 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05$

$$\frac{(n-1)S'^2}{q_1} = 81.526 \Leftrightarrow q_1 = 2.733 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05$$

Nível\grau de confiança associado $=1 - \alpha = 1 - 2 * 0.05 = 0.9$

4. Numa amostra aleatória de 160 alunos das licenciaturas do ISEG, 80 declararam pretender seguir um percurso profissional numa área quantitativa. O intervalo de confiança para a proporção de alunos do ISEG que pretendem o mesmo é, para um grau de confiança de 95%, (0.4225; 0.5775). Indique, qual a dimensão da amostra necessária para reduzir a metade a amplitude deste intervalo.

População $X \sim B(1, \theta)$ tem-se uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_{160})$

V.F. $\mathrm{T} = \frac{\bar{x}-\theta}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$$IC_{\theta}^{(1-\alpha)*100\%} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right)$$

Amplitude do $IC_{\theta}^{(1-\alpha)*100\%} = 2\, z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 2 * 1.96\sqrt{\frac{0.5*0.5}{n}} = \frac{0.5775-0.4225}{2}$

$$\Rightarrow 2 * 1.96\sqrt{\frac{0.5 * 0.5}{n}} = 0.0775 \Leftrightarrow n = \left(\frac{2 * 1.96 * 0.5}{0.0775}\right)^2$$

Então a amostra teria de ter dimensão 640